Exempelsamling
Grundläggande systemmodeller

Klas Nordberg

Computer Vision Laboratory
Department of Electrical Engineering
Linköping University

Version: 0.11– September 14, 2015

Uppgifter markerade med (A) är lite mer avancera än de övriga och kan lämpligen göras i mån av tid. Uppgifter markerade med (M) leder fram till numeriska beräkningar som kan vara jobbiga att utföra för hand eller med enbart en enklare räknedosa. Istället rekommenderas Matlab eller annan lämplig mjukvara för numeriska beräkningar.

1 Signaler och system

1.1 En växellåda i en bil sitter mellan motorns utgående drivaxel och hjulaxeln som driver hjulen. Beskriv växellådan som ett system: ange in- och utsignaler och vad för fysikaliska storheter de representerar. Ange även typ av system. *Ledning:* Det finns mer än ett sätt att göra detta.

1.2 Gör samma sak som i förgående uppgift för ett av bilens hjul.

1.3 En vattenbassäng har en breddavlopp som tömmer dess ytvatten, renar det och värmer upp det till en temperatur K som kan ställas in med ett reglage, och pumpar slutligen tillbaka vattnet till bassängen. Det hela kan ses som ett system. Ange in- och utsignaler för systemet, och rita ett enkelt schema som visar undersystem. Vad är systemets inre tillstånd? Vad påverkar bassängens temperatur? Ledning: det kan finnas fler än ett sätt att beskriva bassängen som ett system.

2 LTI-system

2.1 (A) Visa att kaskadkopplingen av två LTI-system, $\mathcal{H}_1$ och $\mathcal{H}_2$, resulterar i ett nytt system $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_2\mathcal{H}_1$ som även det är LTI. *Ledning:* Visa att $\mathcal{H}_3$ är linjärt och tidsinvariant genom att använda de tekniker som beskrivs i avsnitt 3.1.2 och avsnitt 3.2.2 i kompendiet.

2.2 (A) Visa att linjärkombinationen av två LTI-system resulterar i ett LTI-system. *Ledning:* samma som i föregående uppgift.

2.3 Visa att ett system bestående enbart av en tidsvariabel förstärkning ändå är ett linjärt system.

2.4 Visa att en derivator är ett linjärt system.

2.5 Visa att en tröskling är ett olinjärt system.

2.6 Alla LTI-system har en systemoperator som kan beskrivas på formen

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau. \tag{2.1}$$

där h är systemets impulssvar. Visa det omvända: att ett system med operatorn $\mathcal{H}$ verkligen är ett LTI-system.

2.7 Ange impulssvaret $h(t)$ för ett system $\mathcal{H}$ som avbildar insignalen identiskt på utsignalen:

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = x(t). \tag{2.2}$$

2.8 Ange impulssvaret h för ett LTI-system $\mathcal{H}$ som förstärker med faktorn a och tidsfördröjer med Δt. Systemet kan erhållas genom kaskadkoppling av en förstärkare, med impulssvar $h_1(t)$, och en tidsfördröjning, med impulssvar $h_2(t)$. Visa att $h = h_1 * h_2$ stämmer i detta fall.

2.9 Ange impulssvaret $h(t)$ för ett system $\mathcal{H}$ som ger en utsignal i form av en integral av insignalen:

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau. \tag{2.3}$$

2.10 Bestäms stegsvar och impulssvar för ett LTI-system, med insignalen $x(t)$ och utsignalen $y(t)$, som har den systembeskrivande ekvationen

$$\frac{d}{dt}y(t) + k\,y(t) = \frac{d}{dt}x(t). \tag{2.4}$$

3 Cosinussignaler

3.1 Två LTI-system, $\mathcal{H}_1$ och $\mathcal{H}_2$, har amplitudkarakteristikerna $D_1(\omega)$ respektive $D_2(\omega)$ och faskarakteristikerna $\psi_1(\omega)$ respektive $\psi_2(\omega)$. Systemen kaskadkopplas. Visa att det resulterande systemet $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_2\mathcal{H}_1$ har en amplitudkarakteristik $D_3(\omega) = D_1(\omega) \cdot D_2(\omega)$ och faskarakteristik $\psi_3(\omega) = \psi_1(\omega) + \psi_2(\omega)$.

3.2 Bestäm frekvensfunktionen för ett LTI-system i form av en integrerare. *Ledning:* en integrerare är inversa systemet till en deriverare.

3.3 Bestäm frekvensfunktionen för LTI-systemet som beskrivs i uppgift 2.10.

3.4 (A) Bestäm frekvensfunktionen för det LTI-system som beskrivs av PDE:n av ordning n i (2.39) i kompendiet.

3.5 Förklara varför frekvensfunktionen $H(\omega)$ för ett LTI-system måste ha egenskapen att $H(0)$ är reellt.

3.6 Visa att ett LTI-system med insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$ som har den systembeskrivande ekvationen

$$\frac{d}{dt}y(t) + k\,y(t) = k\,x(t), \tag{3.1}$$

får en frekvensfunktion

$$H(\omega) = \frac{k}{j\,\omega + k}. \tag{3.2}$$

Rita amplitud- och faskarakteristikerna för detta system.

3.7 Visa att ett LTI-system med insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$ som har den systembeskrivande ekvationen

$$\frac{d}{dt}y(t) + k\,y(t) = \frac{d}{dt}x(t), \tag{3.3}$$

får en frekvensfunktion

$$H(\omega) = \frac{j\,\omega}{j\,\omega + k}. \tag{3.4}$$

Rita amplitud- och faskarakteristikerna för detta system.

3.8 (A) Visa att impulssvaret $h[k]$ kan bestämmas enligt (4.78) i kompendiet. Blir motsvarande system alltid kausalt?

4 Faltning och filter

4.1 Bestäm faltningen av enhetspulsen rect med sig själv.

4.2 En funktion f är definierad som

$$f(t) = u(t) \cdot e^{-at}, \quad a > 0. \tag{4.1}$$

Vad blir f faltad med sig själv?

4.3 Exempel på frekvensfunktioner för HP-filter $\mathcal{H}_1$ respektive ett LP-filter $\mathcal{H}_2$ är

$$H_{\text{HP}}(\omega) = \frac{j\,\omega}{j\,\omega + \omega_1}, \qquad H_{\text{LP}}(\omega) = \frac{\omega_2}{j\,\omega + \omega_2}. \tag{4.2}$$

Bestäm frekvensfunktionen för det kaskadkopplade systemet $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$, och skissa motsvarande amplitudkarakteristik. *Ledning:* det bör likna ett BP-filter om $\omega_2 >> \omega_1$.

4.4 $D(\omega)$ betecknar systemets amplitudkarakteristik. Vid vilken vinkelfrekvens ω_0 är D som störst, dvs. systemet förstärker maximalt? Vad blir $D(\omega_0)$, dvs. den maximala förstärkningen? *Ledning:* max-punkten borde finnas där $\frac{d}{d\omega}D(\omega) = 0$.

4.5 Bestäm den systembeskrivande ekvation för ett LTI-system som har samma frekvensfunktion som BP-filtret i uppgift 4.3.

4.6 (A) Utgå från HP- respektive LP-filtren i uppgift 4.3 och beskriv hur ett BS-filter kan skapas som linjärkombinationen av de två filtren. Vilken frekvensfunktion får filtret? Vid vilken vinkelfrekvens ω_0 har filtret sin minsta förstärkning? Vad är den minimala förstärkningen? Bestäm motsvarande systembeskrivande ekvation. *Ledning:* jobba på samma sätt som i de tre föregående uppgifterna.

4.7 (A) Faltning är en kommutativ operation mellan två funktioner. Den är även associativ, dvs. $(f * g) * h = f * (g * h)$ för alla funktioner f, g och h. Visa detta.

4.8 Bestäm frekvensfunktionerna och amplitudkarakteristikerna för de två FIR-filtren som har impulssvaren $[0,50,5]$ respektive $[0,5-0,5]$. Rita amplitudkarakteristikerna. Vilken typ av filter motsvarar de? Vad är gränsfrekvensen för respektive filter? Var finns passband och spärrband för respektive filter?

4.9 Bestäm filterkoefficienterna för ett FIR-filter av längd $n = 3$ som är ett HP-filter. *Ledning:* använd antingen tekniken som beskrivs i kompendiet, som konstruerar ett HP-filter som skillnaden mellan ett allpassfilter och ett LP-filter, alternativt bestäm filterkoefficienter som ger $H(0) = 0$ och $H(\frac{\pi}{T}) = 1$, på liknande sätt som görs i kompendiet för LP-filtret.

4.10 Bestäm filterkoefficienterna för ett FIR-filter av längd $n = 3$ som är ett BP-filter. *Ledning:* Låt $H(0) = H(\frac{\pi}{T}) = 1$ och bestäm sedan koefficienter som minimerar $|H(\frac{\pi}{2T})|$.

4.11 Bestäm filterkoefficienterna för ett FIR-filter av längd $n = 3$ som är ett BS-filter. *Ledning:* Låt $H(0) = H(\frac{\pi}{T}) = 0$ och bestäm sedan koefficienter som maximerar $|H(\frac{\pi}{2T})|$.

4.12 Bestämt förenklade uttryck för det LP-filter som bestäms i kompendiet, tillsammans med det HP-filter, BP-filter och BS-filter som bestäms i uppgifterna 4.9, 4.10 och 4.11. Rita motsvarande amplitudkarakteristiker och faskarakteristiker för $0 \le \omega < \frac{\pi}{T}$.

4.13 Bestäm frekvensfunktionen $H(\omega)$ för systemet med impulssvaret $h(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} \cos(\omega_0 t)$.

5 Sampling och rekonstruktion

5.1 En stationär signal med vinkelfrekvens ω filtreras genom en faltning med filtret $h_0(t) = \mathrm{sinc} t$. Vad är filtrets amplitudkarakteristik $H(\omega)$?. *Ledning:* bestäm utsignalen $y(t)$ för insignalen $x(t) = \cos \omega t$. Använd (4.22) och (B.22), men även (B.6), (B.9) och (A.35) kan vara användbara.

5.2 Vilken typ av filter motsvarar funktionen $h_0(t)$ i uppgift 5.1? Vad är dess gränsfrekvens i Hz respektive rad/s?

5.3 Är motsvarande system kausalt? Hur skulle en kausal approximation av filtret se ut?

5.4 I vilken mening kan detta filter betecknas som *idealt*? Vad skulle det kunna användas till i samband med sampling?

5.5 Hur skulle filtrets impulssvar se ut så att dess gränsfrekvens är ω_0 rad/s?

5.6 Du vill använda ett idealt bandpassfilter, med undre gränsfrekvensen ω_1 och övre gränsfrekvensen ω_2. Hur skulle ett sådant filter kunna byggas upp av filtret i uppgift 5.1?

5.7 En signal $s(t)$ innehåller två frekvenskomponenter, med frekvenserna 15 kHz respektive 30 kHz. Signalen samplas ideal med samplingsfrekvensen $f_s = 44,1$ kHz. Den resulterande diskreta signalen rekonstrueras med en ideal interpolationsfunktion, vilket den tidsdiskreta signalen $s_{\mathrm{rek}}(t)$. Beskriv $s_{\mathrm{rek}}(t)$ och synnerhet hur den eventuellt skiljer sig från $s(t)$.

6 Saker och ting

6.1 Ett system som har frekvensfunktionen

$$H(\omega) = \frac{4}{2\,j\,\omega + 5} \tag{6.1}$$

matas med insignalen

$$x(t) = 3 + \cos(2\,t + 0,2). \tag{6.2}$$

Bestäm systemets utsignal $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$.

6.2 Ett system med insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$ beskrivs med ekvationen

$$4\,\frac{dy}{dt} + 2y(t) = -\frac{dx}{dt}. \tag{6.3}$$

Insignalen är

$$x(t) = 3 + \cos(2\,t + 0,2) + 2\ \sin(3\,t + 0,7). \tag{6.4}$$

Bestäm systemets utsignal $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$. Ledning: bestäm först $H(\omega)$ på liknande sätt som i uppgift 3.6.

6.3 En tidskontinuerlig signal $s(t)$ kan skrivas som en summa av cosinussignaler:

$$s(t) = 3,8 + 6,7\ \cos(423\,t + 0,3) - 9,3\sin(673\,t - 0,4). \tag{6.5}$$

Denna signal samplas idealt, vilket ger den diskreta signalen $s[k]$. Vilken är den lägsta samplingsfrekvens f_s som kan användas för att det ska gå att rekonstruera $s(t)$? Vad blir motsvarande samplingsperiod T?

6.4 De 4 sampel långa pulserna $p_0[k]$ och $p_1[k]$ definieras som

$$p_0[k] = [\ 1\quad 1\quad \text{-1}\quad \text{-1}\ ],\quad p_1[k] = [\ 1\quad \text{-1}\quad 1\quad \text{-1}\ ]. \tag{6.6}$$

Pulserna förekommer i en tidsdiskret signal $s[k]$:

$$s[k] = [\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \underbrace{1\quad \text{-1}\quad 1\quad \text{-1}}_{p_1}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \underbrace{1\quad 1\quad \text{-1}\quad \text{-1}}_{p_0}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ ], \tag{6.7}$$

Första samplet i sekvensen ligger vid $k = 0$ för både pulserna och s. Bestäm impulssvar för filtren $h_0[k]$ och $h_1[k]$ som matchar de två pulserna. Bestäm utsignalen från respektive filter när insignalen är $s[k]$. Ger dessa två pulser en tydlig skillnad i utsignaler som gör det möjligt att detektera vilken typ av puls som passerat respektive filter? Ledning: matchande filter definieras i avsnitt 5.3 i kompendiet.