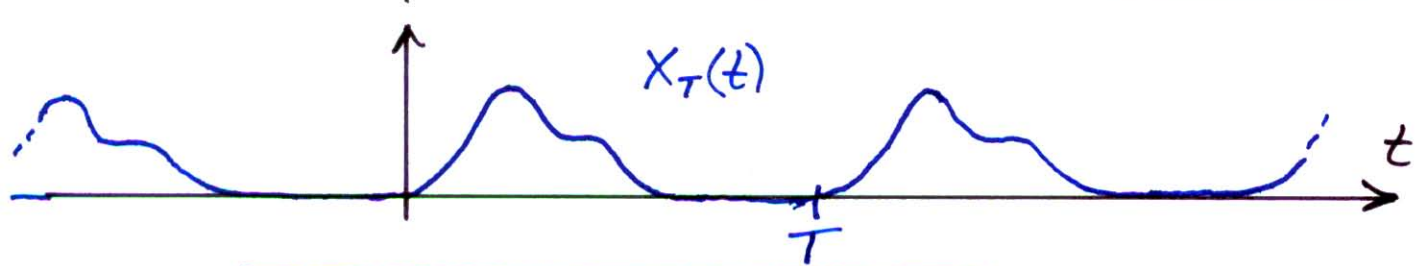
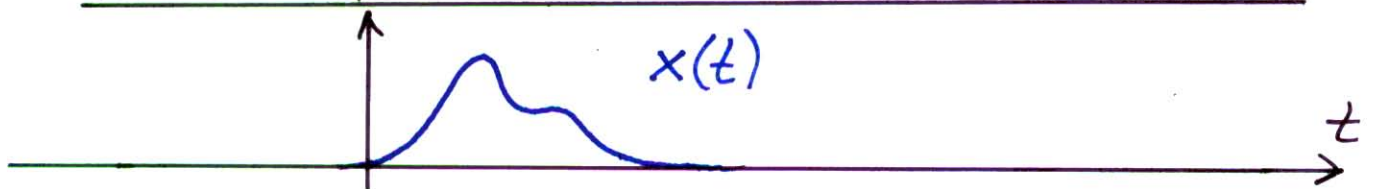


ÖVERGÅNG, FOURIERSERIER \rightarrow FOURIERTRANSFORM



$$X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} X_T(t); \quad t < \infty$$

Frekvensbeskrivning:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_T X_T(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt, \quad \text{där } X_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$$

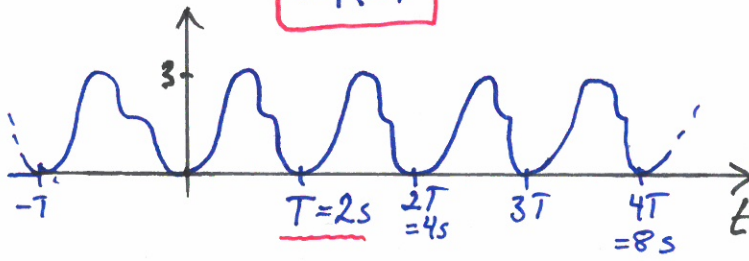
låt $T \rightarrow \infty$ \Rightarrow $\begin{cases} \omega_1 = \frac{2\pi}{T} (= \Delta\omega) \rightarrow d\omega \\ k \cdot \omega_1 \rightarrow \omega \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{T \cdot C_k} = \int_{-T/2}^{T/2} X_T(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \triangleq X(\omega) \\ \underline{X_T(t)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T \cdot C_k \cdot e^{jk\omega_1 t} \cdot \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = X(t) \end{cases}$$

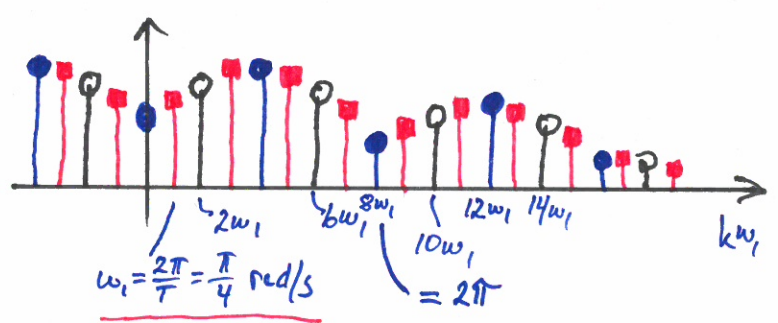
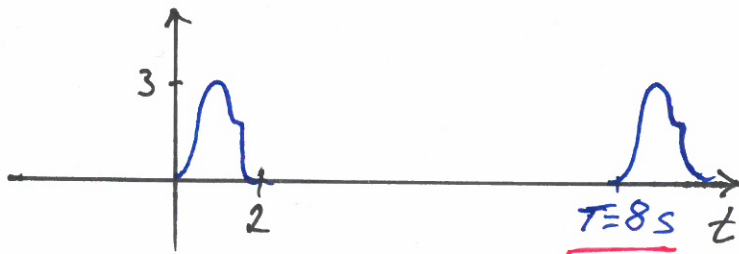
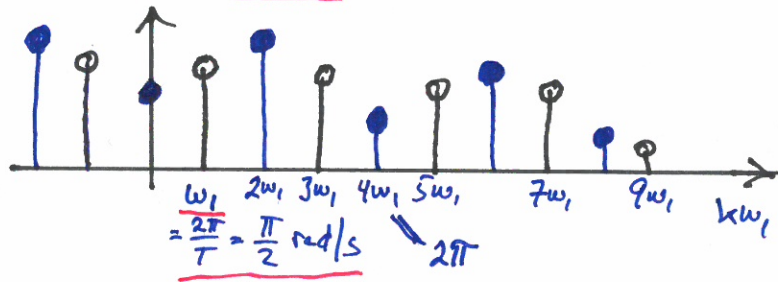
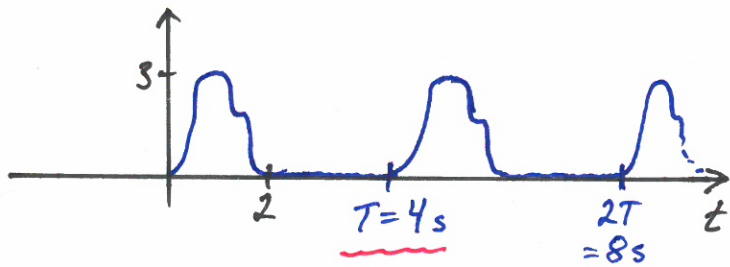
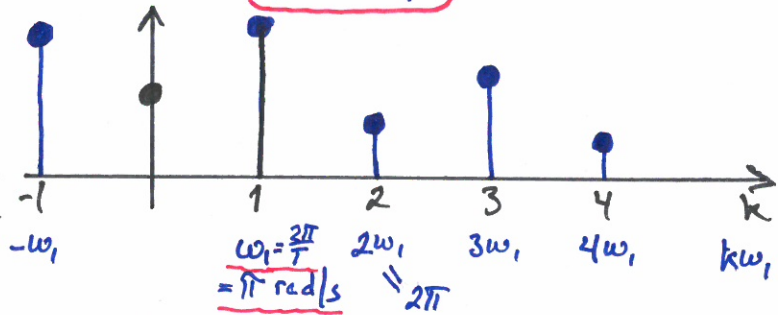
∞ Fourierserieutveckling av $X_T(t)$ $\xrightarrow{T \rightarrow \infty}$ Fouriertransform av $X(t)$

Fourierserie \longrightarrow Fouriertransform

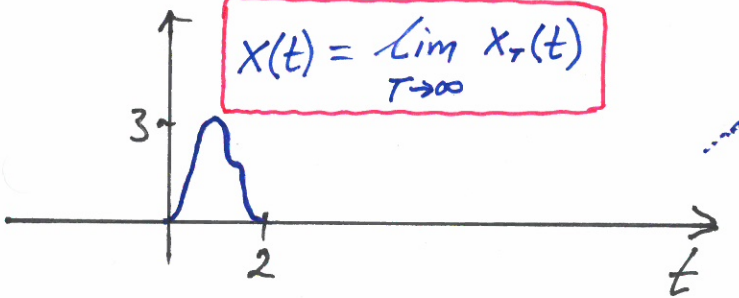
$$X_T(t)$$



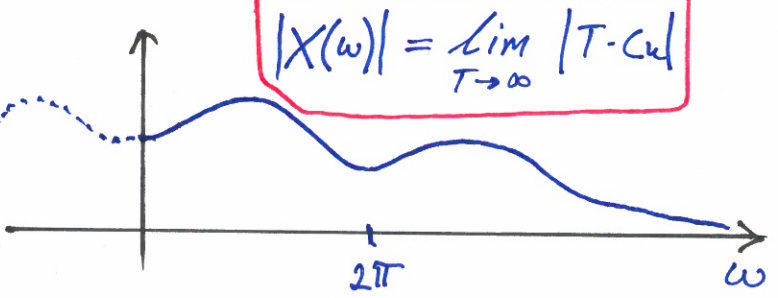
$$|T \cdot C_k|$$



$$X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} X_T(t)$$



$$|X(\omega)| = \lim_{T \rightarrow \infty} |T \cdot C_k|$$



FOURIERTRANSFORMEN

På tavlan (och/eller pdf-dokument):

- ♦ Repetition, faltning & fourierserier
- ♦ Utvidgning, Fourierserieutveckling \Rightarrow Fouriertransform

FOURIERTRANSFORMEN

- ♦ Fouriertransformen till $x(t)$:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Jfr. fourierserie:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- ♦ Inversa fouriertransformen till $X(\omega)$:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Jfr. fourierserie:

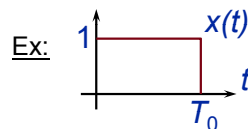
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

- Existensvillkor:

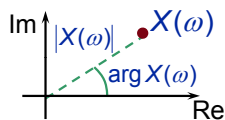
$$\mathcal{F}\{x(t)\} \exists \text{ om } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Frekvenssegenskap hos signal

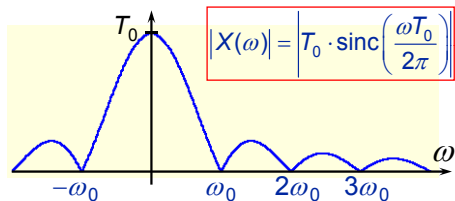
- ♦ Frekvensspektrum, $X(\omega)$:



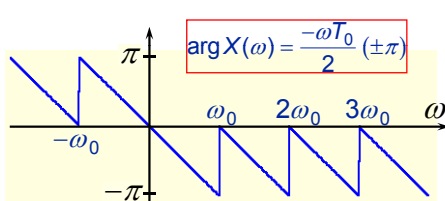
$$X(\omega) = e^{-j\frac{\omega T_0}{2}} \cdot T_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_0}{2\pi}\right) = |X(\omega)| e^{j \arg X(\omega)}$$



Amplitudspektrum, $|X(\omega)|$:



Fasspektrum, $\arg X(\omega)$:



Signalenergi

Signalenergin W för komplexvärd

fouriertransformerbar signal $x(t)$:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Parsevals formel

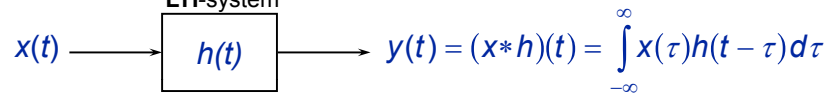
$|X(\omega)|^2$: Energispektrum

Jämför med **signal(medel)effekten** $P = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$ för en T -periodisk signal $x(t)$!

- $x(t)$ är en **energisignal** $\Leftrightarrow 0 < W < \infty, P = 0$
- $x(t)$ är en **effektsignal** $\Leftrightarrow W = \infty, 0 < P < \infty$

SYSTEMANALYS

(Stabilt) Energifritt
LTI-system



$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \dots \text{ /TAVLAN/ } \dots = X(\omega)H(\omega)$$

$$\Rightarrow \text{Faltningsteoremet: } \mathcal{F}\{f_1 * f_2\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

♦ Frekvensfunktion: $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = |H(\omega)|e^{j\arg H(\omega)}$

• Amplitudkaraktäristik: $|H(\omega)|$

• Faskaraktäristik: $\arg H(\omega)$

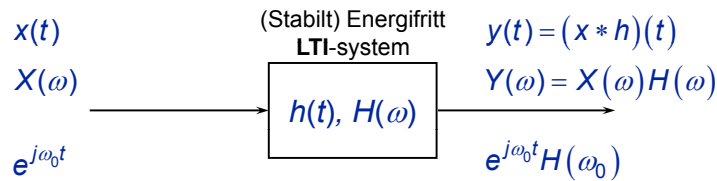
Systemanalys, forts.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \Rightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \\ \arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 \cdot |H(\omega)|^2$$

Energiöverföringsfunktion

Systemanalys, forts.



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} H(k\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_1 t}$$

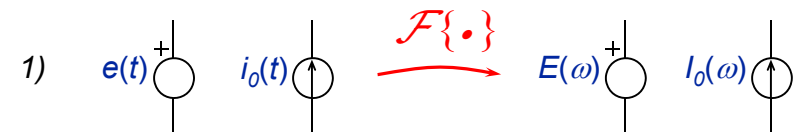
där $D_k = C_k \cdot H(k\omega_1)$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \quad \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} H(\omega_0) - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} H(-\omega_0) = |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$$

$$\underline{X_0 + \hat{X} \sin(\omega_0 t + \varphi)} \quad \underline{X_0 H(0) + \hat{X} |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi + \arg H(\omega_0))}$$

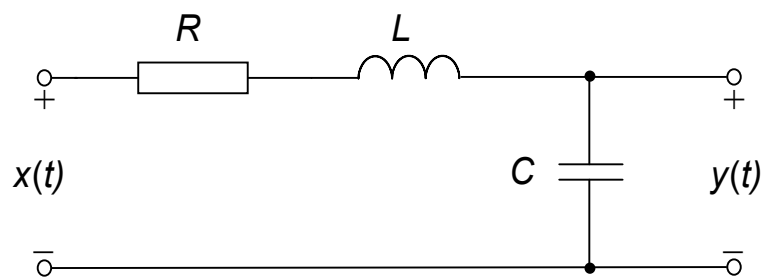
Kretsberäkningar, linjära **RLMC**-nät (passiva kretselement, fouriertransformerbara källor)

METODIK, beräkna godtycklig nätspänning / -ström med hjälp av komplexschema & $j\omega$ -metoden:



Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen

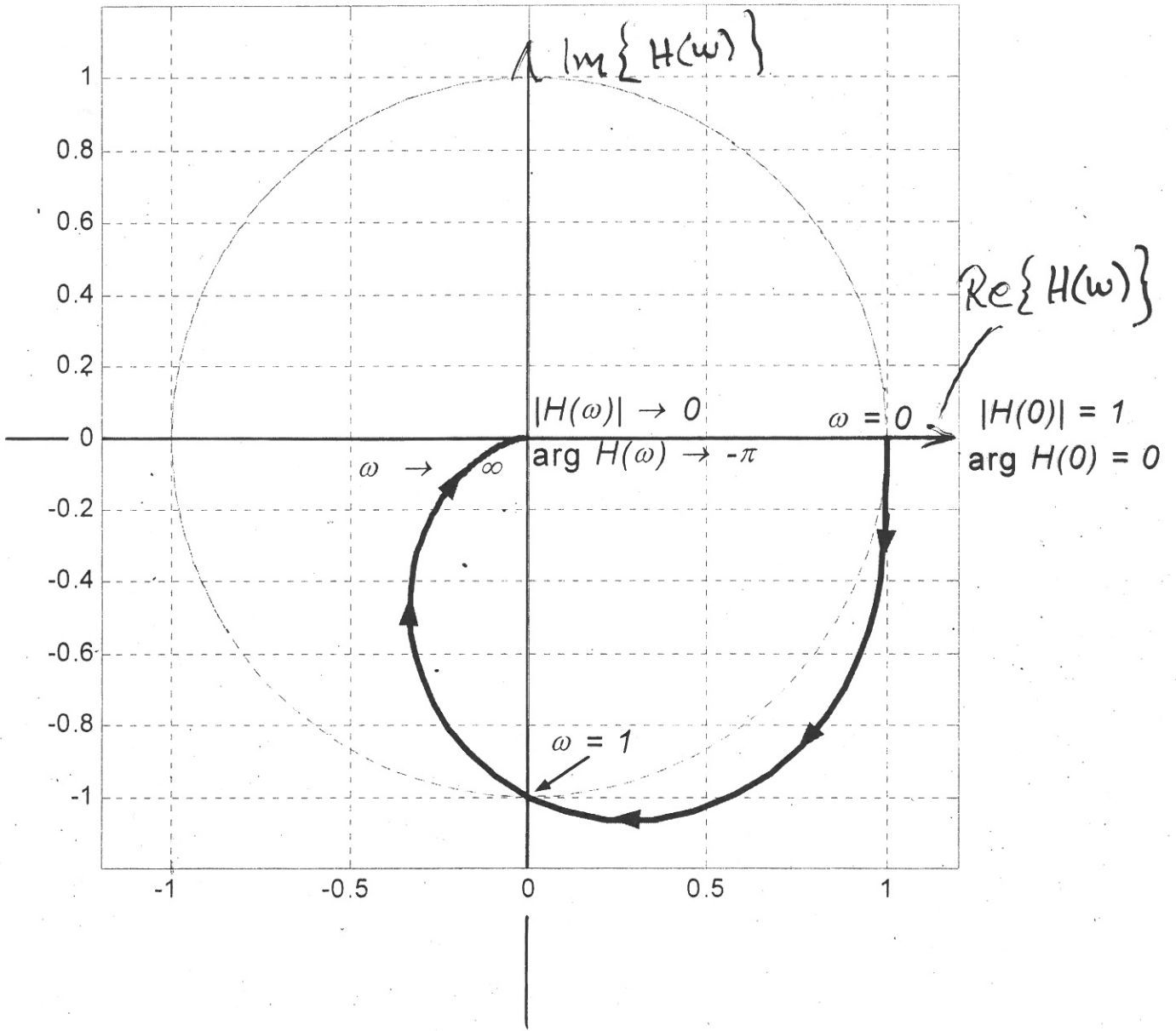
Ett kausalt LTI-system implementeras som RLC -nätet i figuren nedan. Spänningen $x(t)$ utgör insignal och spänningen $y(t)$ över kapacitansen är systemets utsignal. $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ och $C = 1 \text{ F}$.



- Beräkna/bestämt systemets
 - frekvensfunktion $H(\omega)$
 - impulssvar $h(t)$, samt *skissera* impulssvaret
 - systembeskrivande differentialekvation
 - ordning
 - amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$
- Skissera amplitudkaraktäristiken och ange/motivera vilken typ av frekvensselektivt filter det elektriska systemet utgör (dvs. LP, HP, BP, BS eller AP)
- Beräkna utsignalen $y_1(t)$ då insignalen är $x_1(t) = 3 \cdot e^{-2t} u(t)$ [V] och systemet är energifritt.
- Beräkna utsignalen $y_2(t)$ då insignalen är $x_2(t) = 4 + 3 \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)$ [V]

Nyquistkurva:

$$H(\omega) = 1 / (1 - \omega^2 + j\omega)$$



Kretsberäkningar, linjära RLMC-nät

Komplexschema, forts...



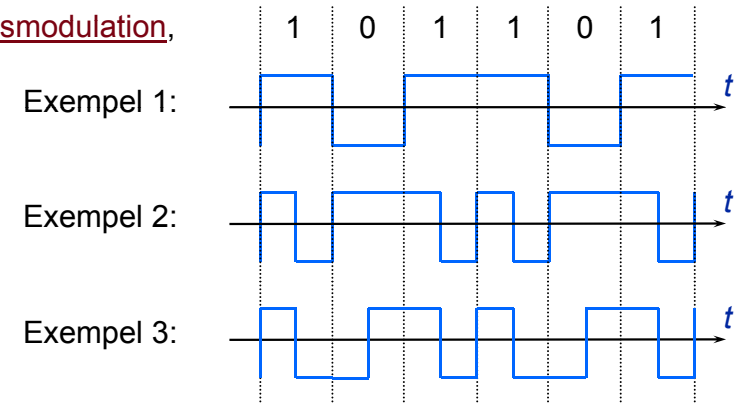
4) Likströmsteori \Rightarrow Sökt storhets fouriertransform ($Y(\omega)$)

5) Inverstransformera \Rightarrow Sökt storhets tidsuttryck ($y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{ Y(\omega) \}$)

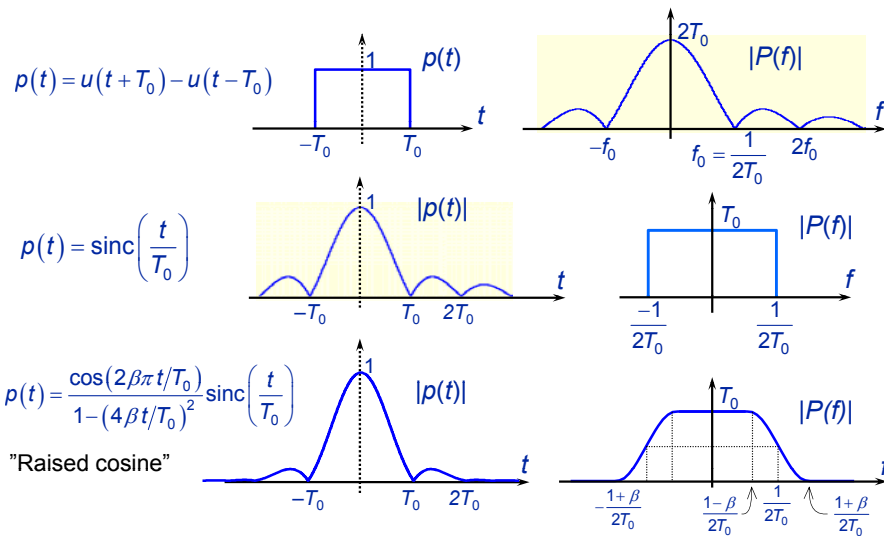
Digital kommunikation

Digital signalering med analoga signalvågformer

Basbandsmodulation,

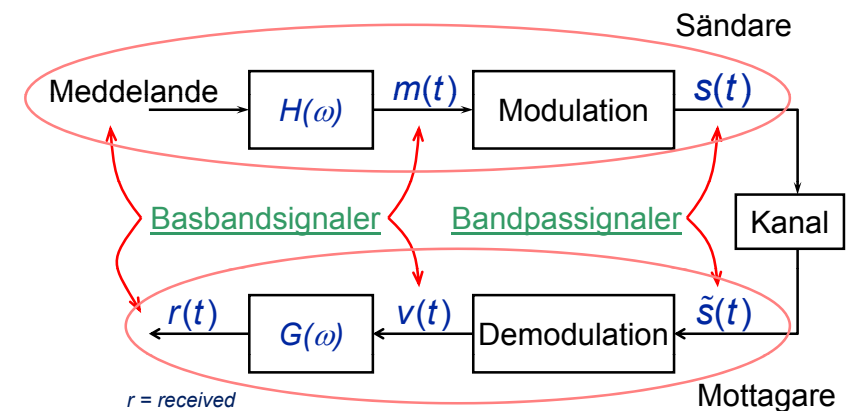


Ex. på signalpulsformer för basbandskanaler:



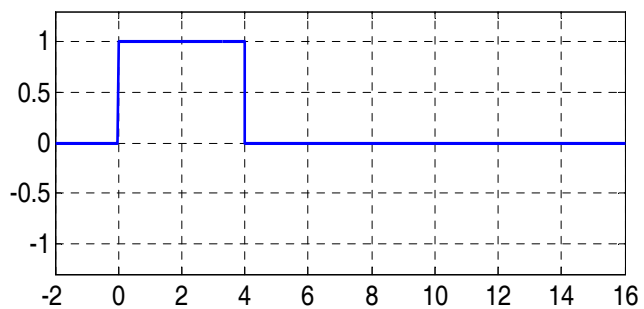
Vanligt: högfrekvent signalering (Ex: ADSL, mobiltn, radio, satellit, bluetooth, WLAN m.m.)

♦ Typiskt analogt kommunikationssystem:

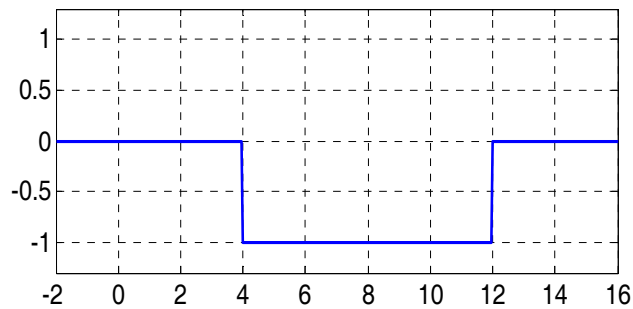


INTERSYMBOLINTERFERENS – utsignalskomponenter för efterföljande signalpulser överlappar varandra:

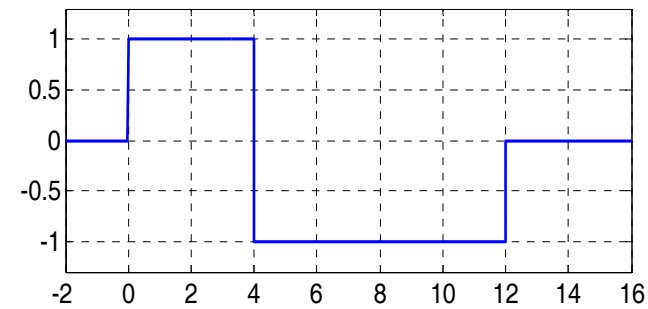
$x_1(t)$



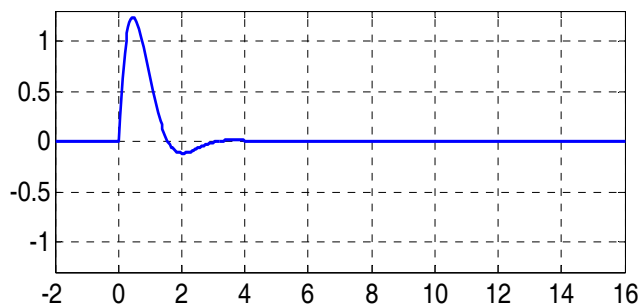
$x_2(t)$



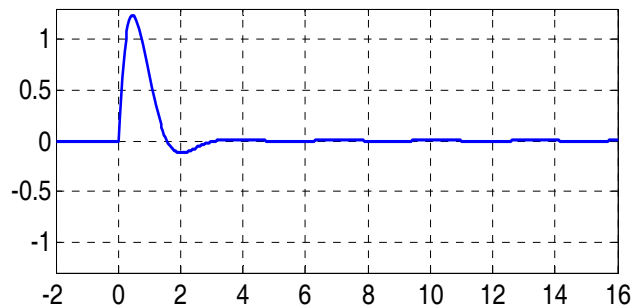
$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$



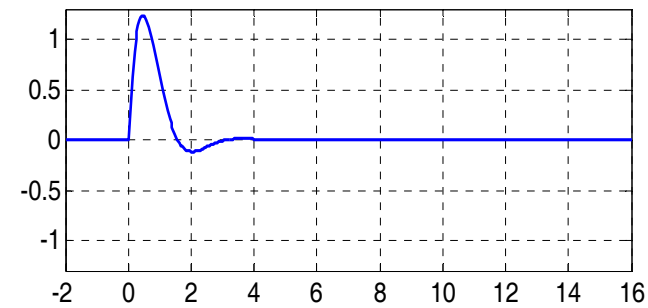
$h(t)$



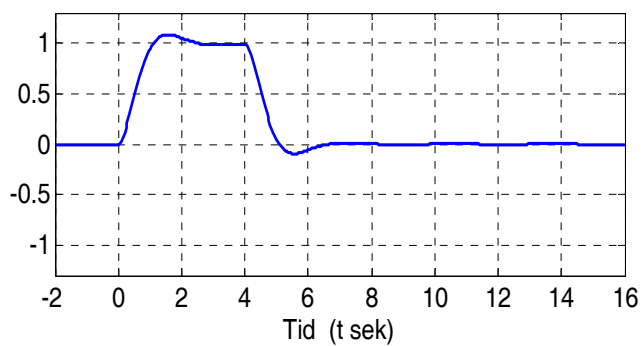
$h(t)$



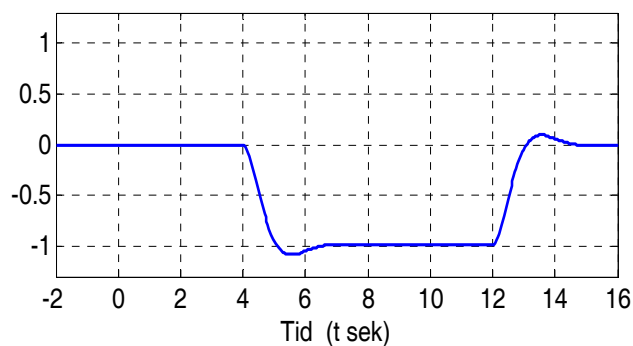
$h(t)$



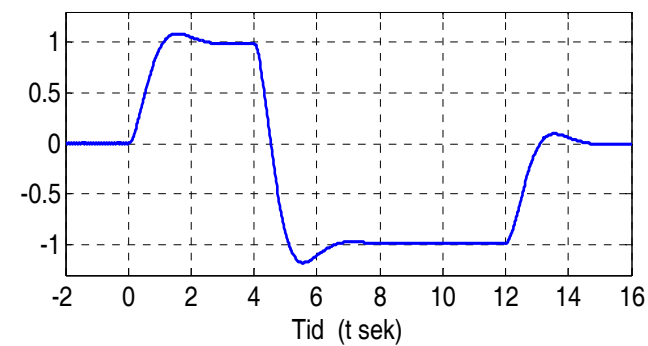
$y_1(t)$



$y_2(t)$



$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$



Exempel – radiosystem & antennlängd

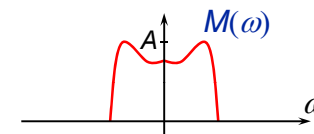
- Våglängd $\lambda = \frac{c}{f}$ m, $c =$ ljusets hast. $\approx 300 \cdot 10^6$ m/s, $f =$ radiovågens frekvens [Hz]
- Mottagande halvvågsantenn: Antennlängd $L = \lambda/2$
- Mottagande kvartsvågsantenn: Antennlängd $L = \lambda/4$

Sändare	Frekvens- omfåde f	Våglängd	Antennlängd	
		$\lambda = \frac{300}{f \text{ i MHz}}$ [m]	$L = \lambda/2$	$L = \lambda/4$
FM-rundradio	88–108 MHz	$\lambda = \frac{300}{100} = 3$ m	1.5 m	0.75 m
Kortvågsradio	t.ex. ≈ 7 MHz	$\lambda = \frac{300}{7} = 43$ m	22 m	11 m
GSM 900	≈ 900 MHz	$\lambda = \frac{300}{900} = 33$ cm	17 cm	8 cm
GSM 1800	≈ 1800 MHz	$\lambda = \frac{300}{1800} \approx 17$ cm	9 cm	4 cm

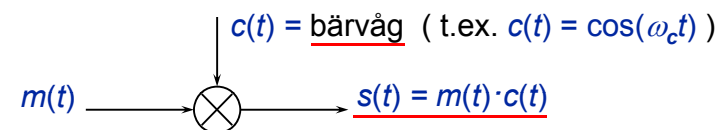
Copyright © Lasse Allredson, LITH

Generell Amplitudmodulering

- ♦ Basbandsignal (här: meddelandesignalen $m(t)$):



- ♦ (Amplitud-)Modulering:

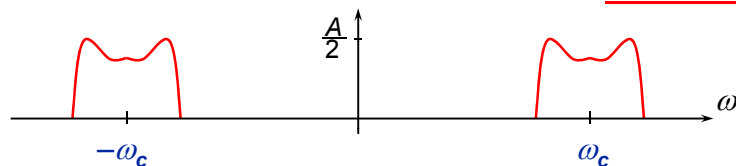


Copyright © Lasse Allredson, LITH

Amplitudmodulering, forts

- ♦ Bandpassignal (AM-DSB-SC):

$$S(\omega) = \mathcal{F}\{m(t) \cdot c(t)\} = \frac{1}{2\pi} (M * C)(\omega)$$



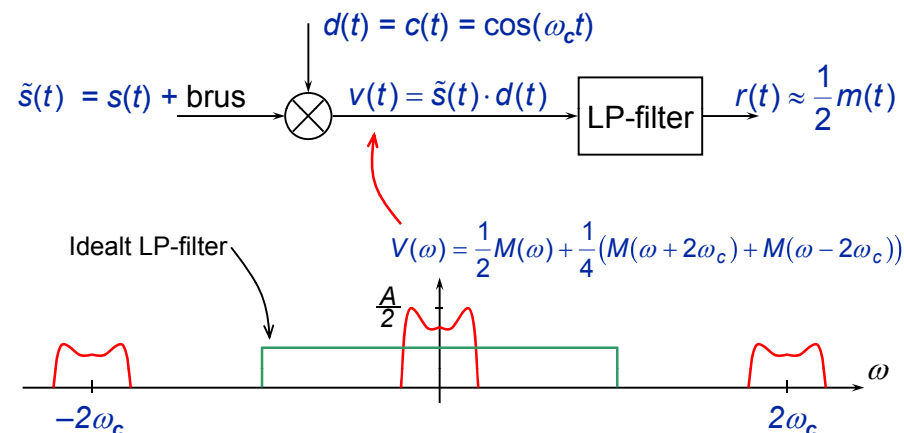
där $C(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(\omega_c t)\} = \pi(\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c))$

$$\Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2}(M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c))$$

Copyright © Lasse Allredson, LITH

Amplitudmodulering, forts

- ♦ Demodulering + LP-filter:



Copyright © Lasse Allredson, LITH